Notes

10. Februar 2019

1 Partielle Differentialgleichungen

1.1 Lösung homogener PDGL 1. Ordnung

Um homogene partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen geht man wie folgt vor:

1. Bestimmung der Phasen DGL.
2. Lösung der Phasen DGL.
3. Auflösung nach Konstanten und Bestimmen von $F(x) = c$
4. Allgemeine Lösung mit $f(F(x))$.

1.1.1 Bestimmung der Phasen DGL

Wir betrachten folgende lineare partielle Differentialgleichung.

$$t^2 u_t - y^2 u_y + (t^2 + y^2) u_z = 0$$

Um nun die Lösung zu bestimmen, bestimmt man zuerst den Koeffizientvektor. Der lautet hier:

$$A(t, y, z) = \begin{bmatrix} t^2 \\ -y^2 \\ t^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Nun erstellen wir unsere charakteristische DGL durch Parametrisierung durch s. Folgendermaßen:

$$X'(s) = A(X(s))$$

In unserem Beispiel kommen wir auf 3 Gleichungen:

$$T'(s) = T(s)^2$$
$$Y'(s) = -Y(s)^2$$
$$Z'(s) = T(s)^2 + Y(s)^2$$

Um aus der charakteristischen Differentialgleichung auf unsere Phasen DGL zu kommen reparametrisieren wir s durch eine der Variable t, y, z. Das machen wir wie folgt: wir setzen $s = t$. Es gilt $\frac{dt}{ds} = t^2$. Nach einsetzen und Kettenregel anwenden, erhalten wir:

$$Y'(t)\frac{dt}{ds} = Y'(t)t^2 = -Y(t)^2 \qquad Z'(t)\frac{dt}{ds} = Z'(t)t^2 = t^2 + Y(t)^2$$

Damit erhalten wir unser Phasen DGL:

$$Y'(t) = -\frac{Y(t)^2}{t^2} \qquad Z'(t) = 1 + \frac{Y(t)^2}{t^2}$$

1.1.2 Lösung der Phasen DGL

Wir können nun das DGL Problem lösen. Es gilt:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{t^2} \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dt}{t^2} \longrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{t} + c_1$$

Lösen für y führt zu $y(t) = -\frac{t}{1+c_1 t}$. Wichtig hierbei ist es, die Konstanten zu beachten. Die Gleichung für $Z(t)$ lässt sich wie folgt lösen.

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{y^2}{t^2} \longrightarrow \int dz = \int \frac{1}{(1+c_1 t)^2} + 1\, dt \longrightarrow z(t) = -\frac{1}{c_1^2 t + c_1} + t + c_2$$

Nun kann man $y(t)$ in $z(t)$ einsetzen. Damit lauten unsere beiden Lösungen:

$$y(t) = -\frac{t}{1 + c_1 t} \qquad z(t) = \frac{y(t)}{c_1 t} + t + c_2$$

1.1.3 Auflösung nach Konstanten und Bestimmen von $F(x) = c$

Vereinfacht lassen sich unsere bisherigen Ergebnisse darstellen.

$$y = -\frac{t}{1 + c_1 t} \qquad\qquad z = \frac{y}{c_1 t} + t + c_2$$

Wir lösen y und z nach c_1 und c_2 auf. Wir erhalten:

$$c_1 = -\frac{1}{y} - \frac{1}{t} = \frac{t+y}{yt} \qquad\qquad c_2 = z + \frac{y^2}{t+y} - t$$

Das führt zu unserer Lösung für $F(x)$:

$$F(x) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y} - \frac{1}{t} \\ z + \frac{y^2}{t+y} - t \end{bmatrix}$$

1.1.4 Allgemeine Lösung mit $f(F(x))$

Unsere Lösung für $u(t, x, y)$ ist gegeben in dem wir ein beliebig differenzierbares $f(c_1, c_2)$ bestimmen und $F(x)$ einsetzen. Beispiel.

$$f(c_1, c_2) = -c_1$$

Dann lautet unsere Lösung:

$$u(t, y, z) = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$$

Wir überprüfen unser Ergebnis.

$$u_t = \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2} \qquad u_y = \frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2} \qquad u_z = \frac{du}{dz} = 0$$

Einsetzen in $t^2 u_t - y^2 u_y + (t^2 + y^2) u_z = 0$ liefert uns:

$$-t^2 \frac{1}{t^2} + y^2 \frac{1}{y^2} = 0$$

Wir sehen: die Gleichung ist erfüllt und damit ist die Differentialgleichung allgemein gelöst. Anfangsbedingungen können über $f(c_1, c_2)$ berücksichtigt werden.

Beispiel. Eine Anfangsbedingung sei $u(1, y, z) = e$. Aus unserer Bildmenge

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y} - \frac{1}{t} \\ z + \frac{y^2}{t+y} - t \end{bmatrix}$$

entnehmen wir $c_1 + 1 = -\frac{1}{y}$ für $t = 1$. Da c_1 konstant ist, enthält die Bildmenge unserer Lösung für $t = 1$ nur einen Punkt, nämlich $y = -\frac{1}{c_1+1}$. Deshalb existiert für diese Anfangsbedingung keine Lösung.

Für triviale Anfangsbedingungen der Art $u(t_0, y_0, z_0) = u_0$ ergibt sich die Lösung

$$f(c_1, c_2) = c_1 + u_0 - c_1(t_0, y_0, z_0)$$

Beispiel. $u(1, 1, 1) = 10$. Es ergibt sich

$$f(c_1, c_2) = c_1 + 10 - c_1(1, 1, 1) = c_1 + 12$$

und damit unsere Lösung

$$u(t, y, z) = -\frac{1}{y} - \frac{1}{t} + 12$$

1.2 Lösung von quasi-linearen homogenen PDGL 1. Ordnung

Erweitern wir unsere Differentialgleichung um einen Term der u enthält, erhalten wir eine PDGL, die quasi-linear und für uns bisher nicht lösbar ist. Zum Beispiel.

$$t^2 u_t - y^2 u_y + (t^2 + y^2) u_z = tu$$

Um diese PDGL zu lösen stellen wir zunächst ein Hilfsproblem auf. Dabei stellen wir u als eine weitere Variable von einem neuen PDGL System auf. Wir ersetzen alle u_n durch v_n und u durch v_u. Die Lösung u der ursprünglichen DGL ist somit eine Variable unserer Hilfs-DGL. Wenn wir diese lösen, erhalten wir eine implizite Darstellung für unsere ursprüngliche DGL. In unserem Fall sähe das wie folgt aus.

$$t^2 v_t - y^2 v_y + (t^2 + y^2) v_z + tuv_u = 0$$

Das Phasen DGL (siehe 1.1.2) dieser PDGL lautet:

$$Y'(t) = -\frac{Y(t)^2}{t^2} \qquad Z'(t) = 1 + \frac{Y(t)^2}{t^2} \qquad U'(t) = \frac{u}{t}$$

Wenn wir dieses DGL-System lösen kommen wir auf folgende Lösung

$$y = -\frac{t}{1+c_1 t} \qquad z = \frac{y}{c_1 t} + t + c_2 \qquad u = te^{c_3}$$

und erhalten unsere allgemeine Lösung durch Umformung auf die Konstanten.

$$c_1 = -\frac{1}{y} - \frac{1}{t} = \frac{t+y}{yt} \qquad c_2 = z + \frac{y^2}{t+y} - t \qquad c_3 = \ln(u) - \ln(t)$$

Wir erhalten die implizite allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c_3 \end{bmatrix} = F(t,y,z,u) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y} - \frac{1}{t} \\ z + \frac{y^2}{t+y} - t \\ \ln(u) - \ln(t) \end{bmatrix}$$

$$0 = f(F(t,y,z,u))$$

Indem wir nun ein beliebig differenzierbares $f(c_1, c_2, c_3) \in C^1$ bestimmen, einsetzen und nach u auflösen, erhalten wir unsere Lösung zur quasilinearen partiellen Differentialgleichung. Z.B. $u = t$ oder $u = te^{\frac{1}{t}}e^{\frac{1}{y}}$ oder mit $f(c_1, c_3) = c_1 + e^{c_3}$ erhalten wir $u = \frac{t}{y} + 1$.